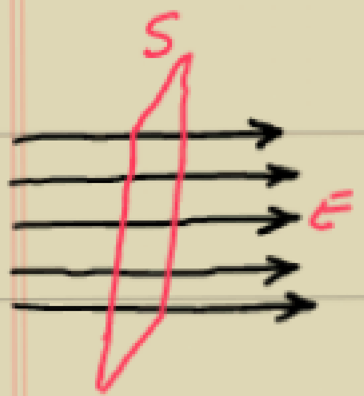
فصل ۳_ قانون گاوس:

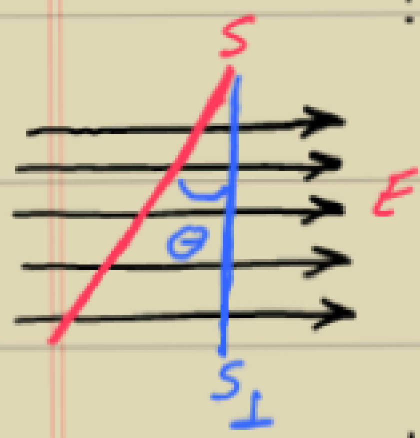
الف) مفهوم شار الکتریکی φ

تعداد خطوط میدان که از سطح عمود بر راستای خطوط می‌گذرد.



۱. سطح مسطح و عمود بر میدان یکنواخت: $\varphi = ES$

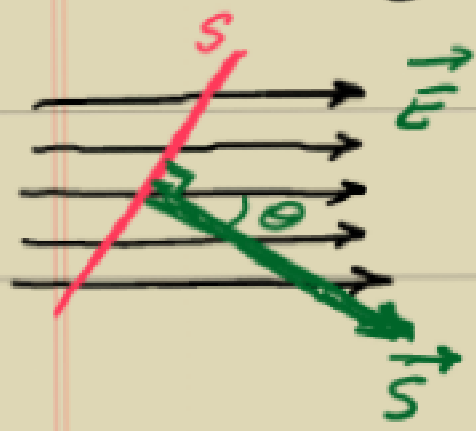
۲_ اگر سطح مسطح و میدان یکنواخت باشه ولی برهم عمود نباشه:



تصویر عمودی سطح را با $S_\perp$ نشان دهیم.

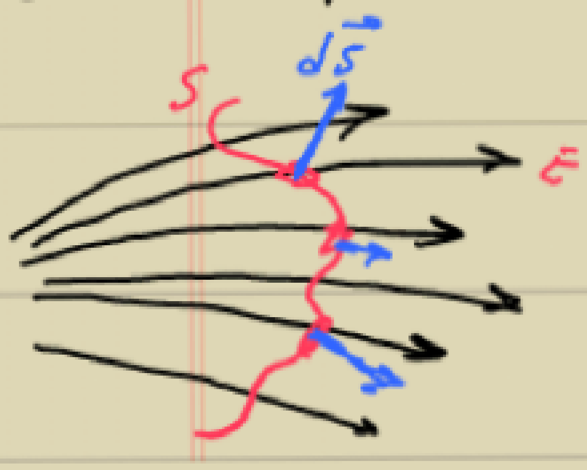
$$\varphi = ES_\perp = ES\cos\theta = \vec{E}\cdot\vec{S}$$

بردار سطح $\vec{S}$ به صورت برداری با اندازه مساحت و عمود بر سطح مورد نظر تعریف می‌شود:



θ زاویه بین بردار سطح با میدان است.

۳_ درصورتی که سطح مسطح نباشه (انحنا داشته باشه) یا میدان یکنواخت نباشه، باید سطح را به المان‌های کوچک ds تقسیم و شار هر بخش را می‌گیریم وسپس انتگرال گیری روی سطح کل انجام شود:

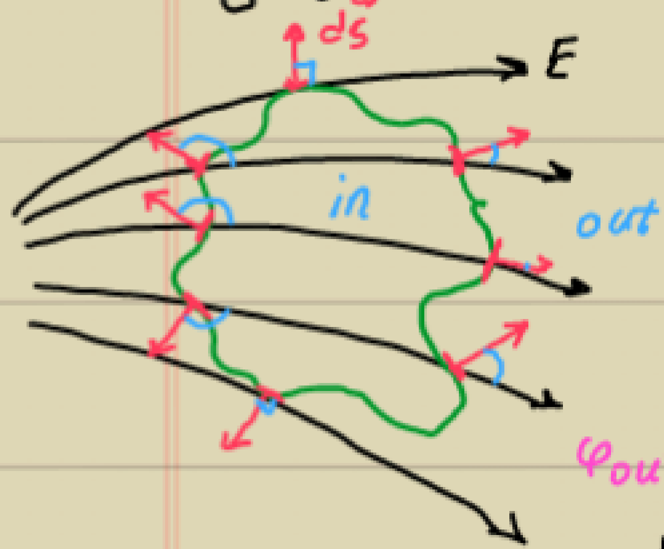


$$d\varphi = \vec{E}\cdot d\vec{s} \rightsquigarrow \varphi = \int d\varphi = \int_s \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

پس می‌توان گفت که شار هر میدان برداری برابر است با انتگرال میدان روی سطح مورد نظر.

اگر سطح را یک سطح بسته (حجم) در نظر بگیریم در این صورت $\varphi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s}$ برای سطح بسته

برای سطح بسته، بردار سطح در هر نقطه، بر سطح عمود و جهت آن همیشه به طرف خارج سطح است.



برای هر سطح بسته، داخل (in) و خارج (out) معنا دارد.

با توجه به زاویه میان $\vec{E}$ و $d\vec{s}$ حالتهای زیر وجود دارد:

$0<\theta<\frac{\pi}{2} \rightarrow d\varphi = \vec{E}\cdot d\vec{s} > 0$ ← شار خروجی φ_{out}

$\theta=\frac{\pi}{2} \rightarrow d\varphi = 0$ ← میدان مماس بر سطح

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi \longrightarrow d\varphi < 0$ ← شار ورودی φ_{in}

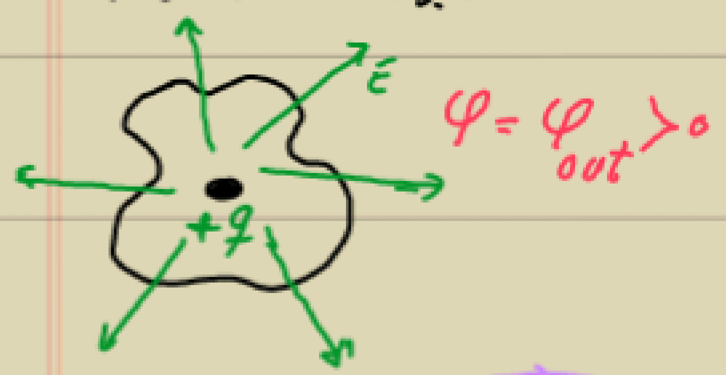
مجموع شار ورودی و شار خروجی را شار خالص می‌گوییم. $\varphi = \varphi_{in} + \varphi_{out}$

همانگونه که از شکل مشخص است، هر خط میدان که به حجم مورد نظر وارد می‌شود، حتماً از آن خارج می‌شود

بنابراین، برای هر سطح بسته (حجم) که در میدان خارجی قرار گیرد؛ همیشه $|\varphi_{in}| = |\varphi_{out}|$

بنابراین: $\varphi = \varphi_{in} + \varphi_{out} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$

از طرفی اگر داخل سطح بسته، بار الکتریکی خالص (+ یا −) وجود داشته باشد:



$$\begin{cases} q_1 > q_2 \rightarrow q_{in} > 0 \rightarrow \varphi = \varphi_{out} > 0 \\ q_1 < q_2 \rightarrow q_{in} < 0 \rightarrow \varphi = \varphi_{in} < 0 \\ q_1 = q_2 \rightarrow q_{in} = 0 \rightarrow \varphi = 0 \end{cases}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که: شار خالص هر سطح بسته صفر است مگر اینکه داخل آن سطح بسته، بار خالص وجود داشته باشد. علامت شار با علامت بار خالص داخلی یکسان است. این مطلب، بصورت یک قانون معروف به قانون گاوس معرفی می‌شود:

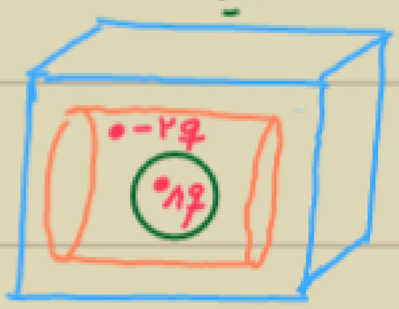
$$\varphi = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

φ ← شار خالص سطح بسته

q_{in} ← بار خالص داخل سطح بسته

ϵ_0 ← ضریب گذردهی خلاء

مثال: در شکل زیر، شار خالص کره، استوانه و مکعب را بدست آورید:



از شکل مشخص است که داخل کره بار $8q$ وجود دارد

$$\varphi_{\text{کره}} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{8q}{\epsilon_0}$$

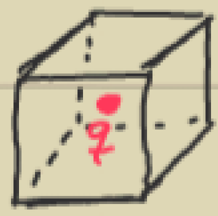
داخل استوانه بار $8q$ و بار $-2q$ وجود دارد پس $q_{in} = 8q - 2q = 6q$

$$\varphi_{\text{استوانه}} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{6q}{\epsilon_0}$$

داخل مکعب نیز بار خالص $6q$ است بنابراین:

$$\varphi_{\text{مکعب}} = \frac{6q}{\epsilon_0}$$

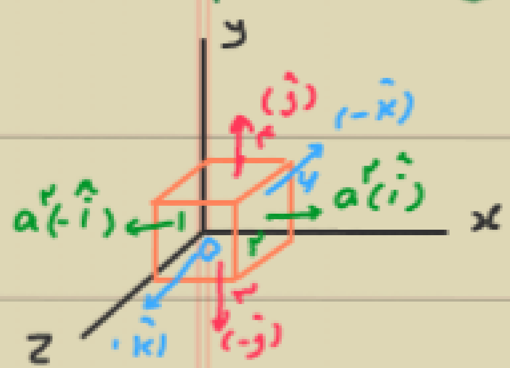
مثال: بار نقطه‌ای $+q$ در مرکز یک مکعب به ضلع a قرار گرفته. شار عبوری از هر وجه مکعب چقدر است؟



شار خالص مکعب از قانون گاوس $\varphi_{\text{کل}} = \frac{q}{\epsilon_0}$. چون بار در مرکز مکعب قرار گرفته و فاصله آن از همه وجوه مکعب یکسان است، بنابراین شار عبوری از همه وجه‌ها با هم برابر است و چون مکعب دارای ۶ وجه است بنابراین:

$$\varphi_{\text{یک وجه}} = \frac{1}{6}\varphi_{\text{کل}} = \frac{1}{6}\left(\frac{q}{\epsilon_0}\right)$$

مثال: مکعبی به ضلع $a = 2\ m$ مطابق شکل در یک میدان الکتریکی غیریکنواخت $\vec{E} = 2x\hat{i}$ در SI قرار گرفته است. شار خالص مکعب را محاسبه کرده و بار خالص درون مکعب را حساب کنید.



بردار سطح مربوط به ۶ وجه مکعب را در نظر می‌گیریم.

شار وجه ۱: $\varphi_1 = \int \vec{E}\cdot d\vec{s} = (2x\hat{i})\cdot a^2(-\hat{i})\Big|_{x=0} = 0$

شار وجه ۲: $\varphi_2 = (2x\hat{i})\cdot a^2(\hat{i})\Big|_{x=a} = 2a^3 = 2(2)^3 = 16\ Nm^2/C$

شار ۴ وجه دیگر صفر است چون میدان بر بردار سطح عمود است.

$$\varphi = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \to q_{in} = \epsilon_0 \varphi = 8.85\times10^{-12}\times16 = \dots\ C$$

هدف از قانون گاوس در این فصل، محاسبه میدان الکتریکی، بدون نیاز به انتگرال گیری های پیچیده است.

$$\varphi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

در این رابطه q_{in} بار خالص داخل سطح بسته است.

$$\oint E\,ds\cos\theta \xrightarrow[\cos\theta=1]{if} \oint E\,ds \xrightarrow[E=cte]{if} E\oint ds = ES = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \longrightarrow E = \frac{q_{in}}{S\epsilon_0}$$

باید سطح بسته ای (سطح گاوسی) انتخاب شود که:

۱- از نقطه ای که قرار است میدان در آن نقطه حساب شود، عبور کند.

۲- زاویه میان بردار سطح ($\vec{ds}$) با میدان ($\vec{E}$) همه جا صفر باشد (سطح بر میدان عمود). [یا در برخی نقاط زاویه صفر و در برخی نقاط زاویه ۹۰° باشد].

۳- مقدار میدان (E) روی سطح گاوسی ثابت باشد.

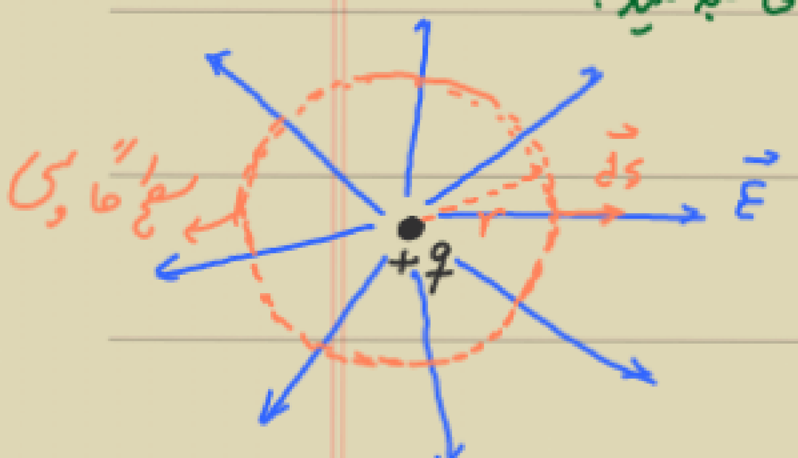
عموماً شرایط فوق باعث محدودیت در کاربرد می شود. برای حالتهای زیر:

الف) خطوط میدان، شعاع های کره باشند (بار نقطه ای و کره ای باردار) (سطح گاوسی کره ای به شعاع r)

ب) خطوط میدان، شعاع های استوانه باشند (خط بار نامتناهی و استوانه های طویل) (سطح گاوسی استوانه ای به شعاع r و طول L)

ج) خطوط میدان موازی (میدان یکنواخت) (سطح گاوسی معمولاً استوانه که محور آن موازی میدان است)

مثال: میدان الکتریکی بار نقطه ای $+q$ را در فاصله r از بار محاسبه کنید.



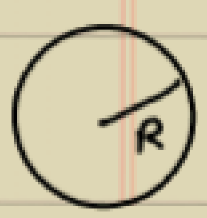
$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

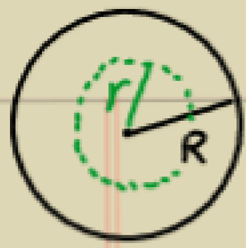
$$\boxed{\oint E\,ds\cos 0 = \oint E\,ds = E\oint ds = ES =}$$

$$E\,4\pi r^2 = \frac{+q}{\epsilon_0} \longrightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

مثال: کره نارسانای توپری به شعاع R دارای بار کل q با توزیع حجمی یکنواخت است. میدان الکتریکی را داخل و خارج کره بدست آورید.

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3q}{4\pi R^3}$$ ρ یکنواخت





داخل $r<R$: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$

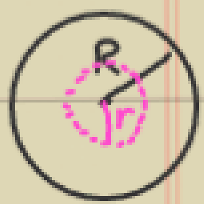
$$E\,4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0}\int \rho\, dv = \frac{\rho}{\epsilon_0}\int dv = \frac{\rho}{\epsilon_0}V = \frac{\rho}{\epsilon_0}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \Rightarrow$$

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \rightarrow \boxed{E = \frac{q r}{4\pi\epsilon_0 R^3}}$$

خارج $r>R$: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$

$$E\,4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0}\int \rho\, dv = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}}$$

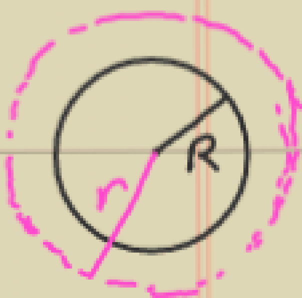
مثال : میدان الکتریکی را داخل و خارج کره نارسانا توپر به شعاع R با چگالی $\rho = Ar$ (A ثابت) را حساب کنید.



داخل $r<R$: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \rightarrow E\,4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0}\int \rho\, dv$

$$\int \rho\, dv = \int_0^r Ar\,(4\pi r^2 dr) = 4\pi A\left(\frac{r^4}{4}\right)_0^r = \pi A r^4$$

$$E\,4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0}(\pi A r^4) \rightarrow \boxed{E = \frac{A r^2}{4\epsilon_0}}$$

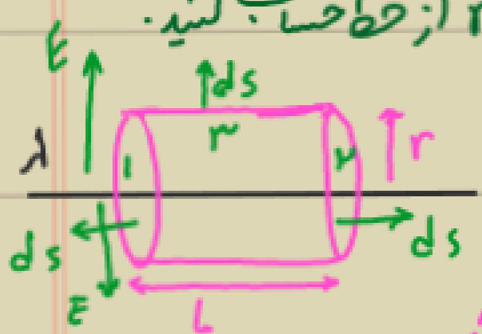


خارج $r>R$: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \rightarrow E\,4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0}\int \rho\, dv$

$$\int_0^r \rho\, dv = \int_0^R Ar\,(4\pi r^2 dr) + \int_R^r 0 = 4\pi A\left(\frac{r^4}{4}\right)_0^R = \pi A R^4$$

$$\rightarrow E\,4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0}\pi A R^4 \rightarrow \boxed{E = \frac{A R^4}{4\epsilon_0 r^2}}$$

مثال : میدان یک خط بار مستقیم نامتناهی با چگالی λ را در فاصله r از خط حساب کنید.



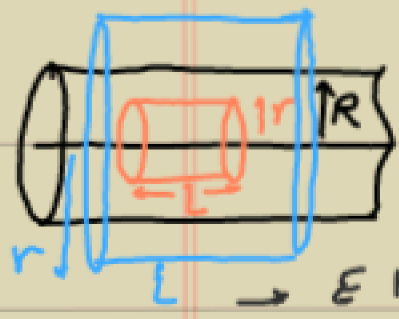
$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$\int_1 \underbrace{\cancel{E\,ds\cos 90}}_{0} + \int_2 \underbrace{\cancel{E\,ds\cos 90}}_{0} + \int_3 E\,ds\,\overbrace{\cos 0}^{1} =$$

$$\int_3 E\,ds = E\int_3 ds = E(S_3) = E(2\pi r L) = \frac{1}{\epsilon_0}\int \lambda\, dl = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}}$$

مثال: میدان الکتریکی یک استوانه نارسانای توپر و طویل به شعاع R با چگالی بار $\rho = A/r$ (A ثابت) را داخل و خارج آن حساب کنید.



داخل $r<R$: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$

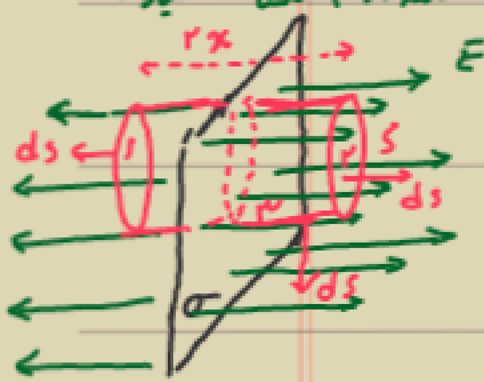
$$\to E\,2\pi r L = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^r \rho\, dv = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^r \frac{A}{r}(2\pi r L\, dr) = \frac{1}{\epsilon_0}\left\{2\pi A L \int_0^r dr\right\}$$

$$= \frac{2\pi A L}{\epsilon_0}(r)_0^r \Rightarrow E\,2\pi r L = \frac{2\pi A L r}{\epsilon_0} \to \boxed{E = \frac{A}{\epsilon_0}}$$

خارج $r>R \to \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \to E\,2\pi r L = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^r \rho\, dv = \frac{1}{\epsilon_0}\left\{\int_0^R \rho\, dv + \int_R^r 0\right\}$

$$\Rightarrow E\,2\pi r L = \frac{2\pi A L R}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{AR}{\epsilon_0 r}}$$

مثال: میدان الکتریکی یک صفحه مسطح و نامتناهی با چگالی بار σ را در نقطه‌ای کنار صفحه (به فاصله x) حساب کنید.



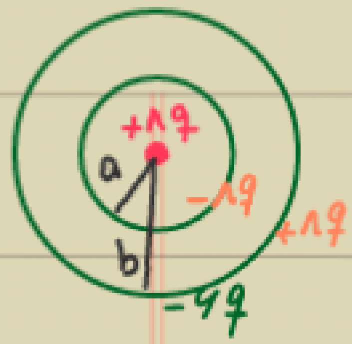
$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \to \int_1 E\,ds\cos 0 + \int_2 E\,ds\cos 0 + \int_3 E\,ds\,\cancel{\cos 90} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$\int_1 E\,ds + \int_2 E\,ds = ES + ES = 2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \to \boxed{E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

خواص رسانا در الکترواستاتیک:

درون رسانا میدان الکتریکی وجود ندارد و رسانا دارای توزیع حجمی بار نیست بلکه بار همیشه روی سطح خارجی رسانا پخش می‌شود. از طرف دیگر خاصیت القای بار در رساناها وجود دارد. بار القایی تاثیری روی بار خالص ندارد و همیشه مقدار بار القا شده مساوی بار القا کننده است.

مثال: بار نقطه‌ای $+8q$ درمرکز پوسته کروی رسانا به شعاع داخلی a و خارجی b قرار گرفته و پوسته دارای بار $-6q$ است. میدان الکتریکی را در نواحی مختلف محاسبه کرده و نحوه پخش شدن بار را در پوسته کروی مشخص کنید.



$r<a: \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \rightarrow E\,4\pi r^2 = \frac{+8q}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{2q}{\pi \epsilon_0 r^2}$

$a<r<b: \quad E=0$ داخل رسانا

$r>b: \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \rightarrow E\,4\pi r^2 = \frac{+8q+(-6q)}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 r^2}$

وجود $+8q$ درمرکز پوسته باعث القاء $-8q$ روی سطح داخلی پوسته و $+8q$ روی سطح خارجی آن می شود که با $-6q$ روی سطح خارجی جمع شده بنابراین روی سطح داخلی $-8q$ و روی سطح خارجی $+2q$ توزیع می شود.